LA LOGICA E LO SVILUPPO STORICO DELLA MATEMATICA

*di Carlo Felice Manara**

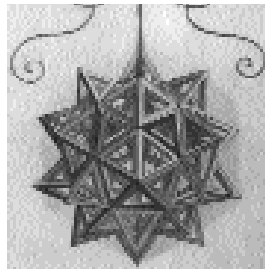
Vengono delineate alcune tappe dello sviluppo storico del pensiero matematico, che sono particolarmente importanti perché hanno rappresentato un aumento di consapevolezza a riguardo della struttura logica che caratterizza la matematica. Ripercorrerle significa anche per noi comprendere più a fondo alcuni nodi concettuali che hanno una forte influenza nell'impostazione del lavoro didattico.

Il pensiero greco all'origine della matematica scientifica

Per usare una frase fatta, si potrebbe dire che le origini della matematica si perdono nella notte dei tempi. Infatti presso moltissime popolazioni antiche si hanno tracce dell'uso di convenzioni per rappresentare i numeri e per eseguire operazioni aritmetiche: si hanno documenti di una matematica cinese, di una indiana, di una matematica maya, e di una matematica egiziana e di una assiro-babilonese. Ma credo si possa affermare che la matematica degna di questo nome sia nata con il pensiero greco: infatti soltanto presso i greci incontriamo enunciati astratti e generali, la cui certezza è stabilita da dimostrazioni, cioè da procedure logiche ineccepibili. A prova di questa affermazione, ricordiamo alcune dimostrazioni che sono all'inizio della matematica scientificamente considerata.

Una è la dimostrazione della esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro[1], come per esempio il lato e la diagonale di un medesimo quadrato. È questa una conseguenza del teorema detto «di Pitagora»; ed è stato osservato che il contenuto della proposizione potrebbe essere presentato dicendo che, comunque si divida la diagonale di un quadrato in parti uguali, per quanto piccole e quindi numerose esse siano, è impossibile ricostruire il lato con un numero intero di esse. Pertanto questa dimostrazione rappresenta una innegabile prova della supremazia della logica sulla esperienza concreta. Infatti l'esperienza concreta su oggetti materiali mostra che la materia è costituita da particelle elementari.

Un secondo esempio di proposizione in cui la deduzione logica supera ogni possibilità di verifica materiale è fornito dalla classica proposizione n. 20 del IX libro degli *Elementi* di Euclide, con cui si dimostra che il numero dei numeri primi è infinito.[2]



[1] Cfr.: S. Maracchia, *La crisi degli incommensurabili,* in: *Emmeciquadro* n. 2, giugno 1998.
[2] Cfr.: A. Frajese e L. Maccioni (a cura di), *Gli Elementi di Euclide,* Utet, Torino 1960.

Un terzo esempio di procedure logiche ineccepibili è fornito dalla classica dimostrazione per assurdo del cosiddetto «secondo criterio di uguaglianza dei triangoli»; dimostrazione che viene riportata abitualmente in molti manuali, e che si incontra già negli *Elementi* di Euclide (Libro I, Prop. 6)[3]. Come è noto, in tale dimostrazione si utilizza lo schema classico: «Se dalla negazione di una proposizione A si deduce una proposizione B, e la B risulta falsa, allora la A è vera.»

DEGLI
ELEMENTI
D'EVCLIDE
LIBRI QVINDICI.
CON GLI SCHOLII ANTICHI.
Volgarizzati già d'ordine del famosissimo Matematico
FEDERIGO COMMANDINO DA VRBINO,
e con Commentarij illustrati.
Et hora con diligenza reuisti, e ristampati.
DIDICATI AL SERENISSIMO
DON FEDERIGO FELTRIO
DELLA ROVERE PRENCIPE D'VRBINO.

IN PESARO, Appresso Flaminio Concordia, MDCXIX.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.
Ad instanza di Gio. Antonio Ingegnieri da Fossombrone.

Il metodo della matematica. Analisi e sintesi

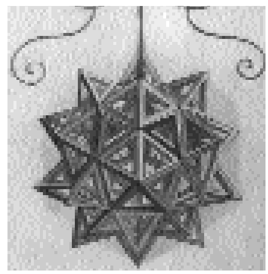
Il trattato degli *Elementi* di Euclide, che abbiamo citato, costituisce il primo esempio storico di opera scientifica rigorosa. Si potrebbe dire, senza esagerare, che esso è un grandioso monumento dello spirito umano, e testimonianza di una civiltà scientifica di grande livello. Si aggiunga che la matematica greca non soltanto ha raggiunto vette altissime per quanto riguarda i contenuti, ma ha anche saputo riflettere sulle procedure che conducono alla dimostrazione rigorosa, e alla soluzione dei problemi. Infatti troviamo descritti, fin dall'epoca di Euclide, e poi, in età alessandrina, esplicitamente codificati i due momenti fondamentali, chiamati *analisi* e *sintesi*, che conducono la nostra mente alla scoperta ed al possesso sicuro della verità. Tali procedure ancora oggi (talvolta sotto nomi strani e in lingua straniera: capita infatti di leggere espressioni come *top down* e *bottom up* per indicare operazioni che potrebbero benissimo essere descritte nella nostra lingua) rimangono gli strumenti fondamentali per l'argomentazione rigorosa, in particolare per l'argomentazione matematica.

Scrive Euclide: «[Si chiama] analisi un procedimento in cui si ammette come vera una certa proposizione [che si vuole dimostrare] e si deduce da questa ipotesi una serie di conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è evidente, oppure è stata ammessa come vera. [Si chiama] sintesi il procedimento con il quale, partendo da certe proposizioni accettate, si giunge ad una proposizione che si vuole dimostrare.»

E Proclo, matematico dell'epoca alessandrina, qualche secolo dopo commenta: «L'analisi dunque prende come punto di partenza ciò che si cerca, e da qui deduce le conseguenze fino a giungere a qualche proposizione che è ammessa come vera; perché, nella analisi noi accettiamo come dato ciò che vogliamo [dimostrare] e cerchiamo quali sono i fondamenti sui quali si basa, ed ancora i fondamenti dei fondamenti, e così via, fino a che riusciamo a giungere, in questo continuo cammino a ritroso, a qualche cosa che è già noto, o che appartiene alla classe dei primi principi; questo metodo noi lo chiamiamo analisi, o soluzione con metodo retrogrado.

Nella sintesi invece, invertendo il procedimento, prendiamo come

punto di partenza ciò a cui siamo arrivati con l'analisi, e via via, dimostrando come tesi quelle proposizioni che prima avevamo prese come ipotesi, e collegandole in ordine logico, giungiamo alla fine a costruire o dimostrare ciò che si cercava.
Possiamo ora osservare che l'analisi può essere di due tipi: l'analisi di un primo tipo si prefigge come scopo la ricerca della verità, ed è pertanto chiamata teoretica; quella del secondo tipo ricerca ciò che ci viene proposto come scopo di un problema, e quindi viene chiamata problematica. Pertanto, nell'analisi teoretica, noi ammettiamo ciò che si cerca come se fosse vero ed esistente, e da questa ipotesi passiamo alle successive conseguenze, che accettiamo come se fossero vere e stabilite, in virtù dell'ipotesi accettata come vera, fino a giungere a qualche proposizione che è accettata come vera.
Allora, se ciò che è ammesso come vero è realmente vero di fatto, ciò che cerchiamo di dimostrare è vero, e la dimostrazione di questo fatto potrà essere ottenuta invertendo l'ordine delle dimostrazioni; ma, se si giunge a qualche cosa che è stato accertato come falso, allora ciò significa che ciò che cerchiamo di mostrare è falso.
Nell'analisi problematica si immagina esistente l'ente che si vuole cercare o costruire, e da questa ipotesi si traggono le conseguenze, fino a che si giunge, per successivi passaggi logici, a qualche cosa che è stato accettato o ammesso. Allora, se ciò che è stato accettato o ammesso esiste ed è effettivamente costruibile, cioè può essere consideratoto matematicamente come un «dato», ciò che è oggetto del problema è pure un ente che esiste e la dimostrazione di questo fatto si ottiene facendo al contrario le dimostrazioni svolte durante il procedimento di analisi; se invece si giunge a qualcosa che è chiaramente impossibile, anche il problema proposto non sarà presumubile.»[4]



[3]Id, pp. 87 sg.
[4]Cfr.: C.F. Manara, M. Marchi, *L'insegnamento della matematica nei primi due anni della scuola media superiore*, La Scuola, Brescia 1993, pp.19-20.
Cfr. anche: T.L. Heath, *The thirteen books Euclid's Elements,* Vol. I, p.18 sg., Dover Publications Inc., New York 1956.

La rappresentazione dei numeri

Abbiamo visto l'importanza che la logica assume nello svolgimento del pensiero matematico; tanto nel momento della ricerca della verità che nel momento della soluzione dei problemi.
Abbiamo anche detto che le osservazioni relative sono state già fatte dalla matematica greca; esse sono state ritrovate in seguito, e riformulate senza sostanziali variazioni (anche se, spesso, chi le ritrovava e riformulava presumeva ingenuamente di avere scoperto per primo queste idee, o dimenticava di citare il pensiero greco, da cui avevano sostanzialmente origine). Si deve tuttavia osservare che la deduzione logica deve necessariamente servirsi di strumenti linguistici e in generale di simboli; e così anche è costretta a fare la matematica, tanto nel momento della ricerca che in quello delle applicazioni.

Pertanto, fin dai primi secoli dello sviluppo della matematica, le singole civiltà hanno anche sviluppato dei sistemi di convenzioni linguistiche e grafiche per rappresentare i numeri naturali.
Si hanno infatti documenti di convenzioni per rappresentare i numeri naturali che risalgono ai cinesi, agli egiziani, agli assiro-babilonesi, ai caldei, agli indiani, ai popoli maya.
Chiunque rifletta sulla comunicazione linguistica, che avviene mediante la parole di una lingua naturale, si accorge che il significato di un termine è quasi sempre determinato dal contesto in cui esso è inserito.
Si consideri per esempio il termine italiano «fine»: esso può essere aggettivo oppure sostantivo; se è assunto come aggettivo, può avere un significato, per così dire, materiale, e allora appare sinonimo di «sottile, appuntito, stretto, penetrante» oppure in senso traslato, e allora si presenta come sinonimo di «beneducato, cortese, signorile», e anche di "arguto, penetrante (in senso traslato), spiritoso». Se viene adoperato come sostantivo, allora può essere maschile o femminile; nel primo caso diventa sinonimo di «scopo», nel secondo diventa sinonimo di «termine»: per esempio è chiaro che il fine di un'impresa differisce dalla fine della stessa.
Abbiamo osservato che la determinazione del significato di un termine, voluto da chi parla o scrive, avviene in base al contesto in cui il termine stesso è inserito. E si comprende facilmente che, per gli scopi delle scienze, e in particolare della logica, appaia molto importante l'univocità dei simboli linguistici (grafici o verbali) che si impiegano e la loro indipendenza dal contesto.
In particolare si potrebbe dire che l'evoluzione della matematica è stata costantemente accompagnata dall'invenzione e dall'impiego di convenzioni e di simboli atti a rappresentare chiaramente e univocamente i numeri e gli altri concetti della dottrina.


Leonardo Pisano (1180 ca. - 1250)

Abbiamo già ricordato alcune antiche civiltà che ci hanno lasciato documenti di vario genere in cui vengono rappresentati numeri e anche operazioni su di essi. Ricordiamo che ancora oggi nella nostra società sono talvolta in uso le convenzioni romane per rappresentare i numeri ordinali (talvolta si sente parlare e si legge dei «numeri romani», come se i numeri potessero avere patria e cittadinanza!). Tuttavia è noto che ormai il mondo civile per rappresentare i numeri utilizza certe convenzioni e certi simboli che sono di lontanissima origine indiana e che sono giunti fino a noi attraverso gli Arabi: il sistema posizionale in base 10.
Si tramanda che l'introduzione di questa simbologia sia dovuta a un mercante e matematico pisano, vissuto tra i secoli XII e XIII, chiamato

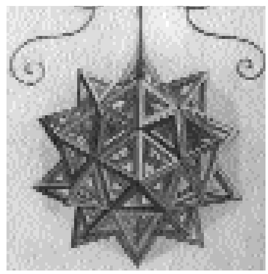
Fibonacci (Leonardo Pisano detto il Fibonacci).
Si può pensare con una certa sicurezza che questo evento abbia segnato una tappa fondamentale per lo sviluppo della matematica, e anche per la vita della società civile. Ciò è provato anche dal fatto che nel mondo moderno, in cui sopravvivono tante lingue nazionali, il sistema di numerazione, dal secolo XIII, è unico, quello appunto trasmessoci dal matematico pisano di cui abbiamo detto.
Cercando di renderci conto delle ragioni di questo fenomeno storico, possiamo osservare che il sistema di convenzioni che noi utilizziamo permette di rappresentare in modo comodo dei numeri comunque grandi, e di eseguire le operazioni su di essi in modo uniforme. Queste due circostanze giustificano il fatto che le convenzioni di numerazione e le principali regole delle operazioni sui numeri formano oggetto dell'insegnamento elementare in tutti i paesi civili; e che in tutti questi si costringono i giovani scolari a memorizzare i risultati di certe operazioni elementari (le cosiddette «tabelline», che una volta venivano unificate sotto la cosiddetta «tavola pitagorica»).
Con la possibilità di eseguire le operazioni sui numeri con regole uniformi e relativamente facili, si è fatta gradualmente strada la consapevolezza del fatto che il calcolo può essere considerato come una particolare deduzione, il cui risultato dipende esclusivamente dal fatto che i simboli e le loro relazioni sono trattati secondo precise regole, che permettono di ottenere informazioni esatte, indipendentemente dal significato dei simboli stessi. È questo l'inizio del metodo dell'algebra, che conduce alla soluzione dei problemi con l'applicazione del metodo di analisi, metodo che è stato già descritto. Constateremo la validità di questa osservazione su un esempio molto semplice, ma paradigmatico.
Sia da risolvere il problema elementare: «Determinare un numero tale che il suo doppio, aumentato di 1, sia uguale al numero stesso, aumentato di 6.»
Applicando il metodo di analisi, supponiamo che tale numero esista, e indichiamolo con il simbolo classico x. Dall'ipotesi che il problema sia risolto dal numero x, si deduce che questo soddisfa alla relazione:

$$2x+1 = x+6. \tag{1}$$

Da questa ipotesi, applicando le regole che valgono per tutti i numeri (e quindi anche per x, che per ipotesi provvisoria esiste ed è un numero) con passaggi elementari, che sono ben noti e quindi non riportiamo, si ottiene la relazione:

$$x = 5. \tag{2}$$

Partendo dalla (2), si può ora applicare il metodo di sintesi; il quale, in questo caso conduce a verificare che il numero 5 soddisfa alla relazio-



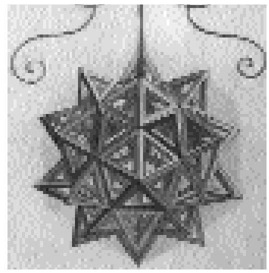
ne (1) che, come suol dirsi, traduce il problema.

La geometria analitica

René Descartes (1595 - 1650)

Abbiamo osservato che l'introduzione e l'adozione delle convenzioni indiane per rappresentare i numeri ha reso evidente un aspetto del calcolo: quello secondo cui esso si presenta come una deduzione, ottenuta con l'applicazione delle regole dei simboli (numerici) adottati. Questa osservazione è confortata dalla nota evoluzione storica, che ha condotto alla invenzione e poi all'adozione generale di quell'insieme di metodi che viene oggi chiamato «Geometria analitica»; il fatto che si tratti di metodi è confermato da ciò che scrive Descartes nella sua *Géométrie* (René Descartes, 1695-1650, nome latinizzato - come allora si usava - in *Cartesius,* e italianizzato in Cartesio).
Si potrebbe dire che le idee fondamentali della Geometria analitica consistono in certi insiemi di convenzioni, mediante le quali gli elementi della geometria euclidea classica vengono rappresentati con numeri chiamati, come è noto, coordinate. In tal modo le relazioni tra elementi geometrici punti, o figure in generale si traducono in relazioni tra numeri, e i problemi geometrici, riguardanti punti o in generale figure, si traducono in problemi tra numeri.
Quindi per la risoluzione dei problemi geometrici l'algebra si presenta come lo strumento fondamentale per mettere in atto la procedura classica di analisi, nella quale la deduzione viene ridotta a un calcolo, cioè all'applicazione delle leggi formali che reggono le operazioni sui numeri.
La situazione è stata presentata magistralmente da Federigo Enriques, il quale scriveva: «La scuola di Platone, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento "analitico" che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa "analisi" si comincia col supporre che il problema proposto P sia risoluto, e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risoluto in forza del precedente, finché si arrivi ad un problema R che si sappia risolvere. La "sintesi" consiste nel partire dalla soluzione di quest'ultimo problema R, e dedurne via via la risoluzione della nostra catena di problemi in ordine inverso fino a dimostrare la soluzione di P. Questa dimostrazione è necessaria, perché con l'analisi si è dimostrato soltanto che le soluzioni di P sono soluzioni di R, ma non viceversa. Insomma l'analisi è una decomposizione ideale del concetto della figura da costruire, nelle condizioni, proprietà o note che la determinano (ed è quindi in rapporto

con la teoria platonica delle idee). Essa appare come un procedimento di generalizzazione dei problemi. L'opposto si può dire della sintesi la quale, da sola, fornisce certo soluzioni del problema proposto, ma non tutte. Il significato greco dell'analisi dei problemi geometrici si è evoluto nel progresso moderno delle scienze matematiche. Su questa evoluzione sembra aver massimamente influito il fatto che il metodo di risoluzione detto "dei luoghi geometrici" è divenuto, con Cartesio, il fondamento dell'applicazione sistematica dell'algebra alla geometria. Nella trattazione algebrica si è visto soprattutto la decomposizione delle condizioni del problema in condizioni elementari, espresse da equazioni. Perciò il metodo cartesiano ha ricevuto il nome di "geometria analitica", e poi tutta l'algebra, con il calcolo differenziale ed integrale in cui si prolunga, ha preso il nome di "analisi matematica". Con questo nome i moderni riconoscono, in qualche modo, nella più generale scienza dei numeri e delle equazioni, l'organo delle matematiche, che permette di analizzare e ricondurre a una forma comune più generale tutti i problemi di geometria, di meccanica, eccetera.»[5]
Pertanto si potrebbe dire che l'invenzione della geometria analitica segna una svolta importantissima nello sviluppo della matematica, perché introduce metodicamente il linguaggio dei numeri nella deduzione, cioè nell'attuazione del metodo di «analisi»; deduzione che, prima di allora, era stata prevalentemente eseguita con l'impiego della lingua comune.



[5]F. Enriques, in: *Enciclopedia Italiana*, Istituto G. Treccani, voce Analisi, Vol. 3, p. 86.

Leibniz e l'inizio della logica simbolica

Abbiamo messo in evidenza il fatto che quasi sempre il significato di un termine del linguaggio comune viene precisato dal contesto del discorso (o dell'opera) in cui il termine viene inserito. Ciò è spiegabile anche con l'osservazione del fatto che il linguaggio quotidiano non serve soltanto alla logica ed alla scienza: esso viene impiegato anche per dare ordini, per comunicare e suscitare emozioni e per moltissimi altri scopi. Nasce pertanto l'opportunità, o addirittura l'esigenza di possedere un sistema di simboli che eviti quelle ambiguità del linguaggio comune che ostacolano la precisione della comunicazione dei concetti e quindi l'efficacia ed il rigore della deduzione.
L'adozione delle convenzioni della geometria analitica, e della deduzione ridotta a calcolo, appare come un esempio evidente della opportunità di questa evoluzione linguistica.
Il matematico e filosofo Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646- 1716) ebbe (forse per primo) l'idea di utilizzare un sistema di simboli costanti e indipendenti dal contesto locale

per rappresentare i rapporti tra i concetti, di modo che la deduzione possa essere ricondotta ad una manovra di simboli, secondo le leggi proprie di questi.
Si osservi che poco fa è stato utilizzato il sintagma «contesto locale»: infatti appare molto difficile costruire un sistema di simboli che siano totalmente ed assolutamente indipendenti da un qualunque contesto: e ciò perché, quando un simbolo viene costruito artificialmente è necessario ricorrere al linguaggio comune per spiegarne il significato convenzionale che gli viene attribuito. Ciò appare vero, a meno che non si tratti del caso molto particolare di certi simboli che vengono detti «parlanti», perché sono costruiti in modo che la loro interpretazione non richieda conoscenze complicate: per esempio, il simbolo dell'omino che corre, aggregato alla scritta *EXIT*, per indicare la via di scampo da un eventuale incendio di un fabbricato. In generale tuttavia, quando si introducono dei simboli convenzionali e nuovi risulta necessario - ripetiamo - spiegarne il significato, e soprattutto enunciare in modo certo e comprensibile le regole che ne reggono l'impiego, facendo ricorso al linguaggio comune.
Tuttavia questo contesto del simbolo, e di conseguenza il suo significato, si mantiene limitato e costante, in tutto il corso di una stessa opera.

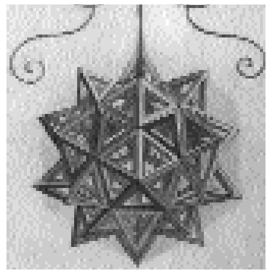

Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

L'idea di Leibniz venne ripresa nel secolo XVIII dal grande matematico svizzero Eulero (Leonhard Euler, nome italianizzato in Eulero, 1707-83) e in seguito dal logico inglese J. Venn (John Venn, 1834-1926). E ancora oggi si insegnano nelle nostre scuole i «diagrammi di Eulero-Venn» per rappresentare convenzionalmente in modo grafico i rapporti tra concetti, e le operazioni logiche su di essi. Va osservato tuttavia che queste rappresentazioni grafiche sono soltanto delle illustrazioni, e non costituiscono strumenti per la dimostrazione delle proposizioni coinvolte. Si osserva inoltre che le rappresentazioni di Leibniz e poi quelle di Eulero tengono conto soltanto di quella che viene chiamata la «estensione» di un concetto; in altre parole queste illustrazioni rappresentano simbolicamente gli insiemi di enti ai quali compete un concetto; quella che si chiama la «comprensione» (o anche la «intensione») di un concetto non viene rappresentata con questi metodi. Prendendo un esempio dalla geometria, consideriamo il concetto di «quadrato»; la sua estensione è data dall'insieme di tutti i quadrati; la sua comprensione è data dalla definizione, come «poligono piano di quattro vertici e quattro lati, avente tutti i lati e tutti gli angoli interni uguali».
È ovvio che soltanto la definizione del concetto, cioè la conoscenza della sua comprensione, permette la deduzione delle

proprietà dell'ente definito.

Boole e l'algebra della logica

Abbiamo osservato che i diagrammi di Eulero-Venn costituiscono soltanto un'illustrazione di certi aspetti dei concetti logici. Un passo avanti decisivo sulla strada della rappresentazione diretta dei concetti, delle loro relazioni, e delle operazioni su di essi fu compiuto da G. Boole (George Boole, 1815-64), che viene considerato come uno dei fondatori della logica simbolica moderna. Egli infatti non soltanto adottò la tecnica di rappresentare i concetti con simboli convenzionali e non con le parole del linguaggio comune, ma escogitò delle leggi formali, analoghe a quelle dell'algebra. La sua opera diede origine a tutta una serie di ricerche di algebra astratta, e a una branca di questa scienza che è chiamata «Algebra di Boole».



Il Boole sottolineò l'analogia tra le operazioni che egli aveva scelto di rappresentare e le operazioni sui numeri dell'algebra abituale. Tuttavia tale analogia non è ovviamente completa e oggi si preferisce scegliere dei simboli appositi e specifici per indicare le operazioni dell'algebra di Boole. Quando si vogliano applicare le operazioni dell'algebra di Boole ai concetti della teoria elementare e intuitiva degli insiemi, si sceglie di rappresentare gli insiemi con i punti interni a certe figure limitate da curve chiuse: per esempio limitate da circonferenze o da ovali o da altre curve dello stesso tipo (i diagrammi di Eulero Venn di cui abbiamo detto sopra). Inoltre si scelgono due operazioni fondamentali: l'intersezione e l'unione di due insiemi.

Tali operazioni vengono indicate con simboli specifici. Così, indicando degli insiemi con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, come:

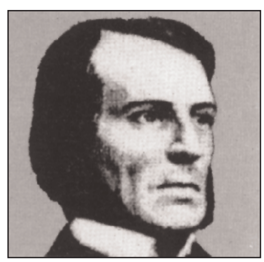
(3) A, B, C, ... X, Y, Z, eccetera

si suole indicare con il simbolo:

(4) $A \cap B$

(leggendo «A intersezione B») l'insieme costituito dagli elementi che eventualmente appartengono a entrambi; e si suole indicare con il simbolo:

(5) $A \cup B$



George Boole (1815-1864)

(leggendo «A unione B») l'insieme costituito dagli elementi che appartengono a almeno uno dei due insiemi A e B. Le due operazioni di intersezione e di unione hanno certe proprietà formali, che vengono indicate con nomi appositi: commutativa, associativa, distributiva di ciascuna delle operazioni rispetto all'altra, idempotenza. Si dimostra che, in forza delle proprietà delle operazioni or ora enunciate, si può

definire anche l'intersezione e l'unione di più di due insiemi.
Inoltre si sceglie un simbolo apposito, abitualmente il simbolo:

(6) $\varnothing$

(analogo allo zero dell'aritmetica) per indicare l'insieme vuoto.
Tale simbolo ubbidisce alle leggi formali[6]:

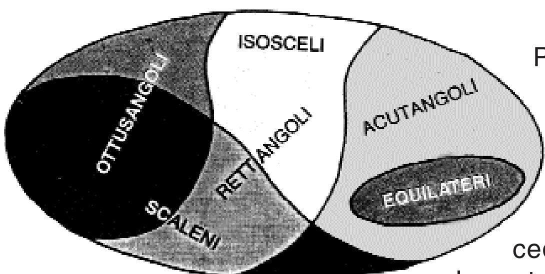
(7) $A \cap \varnothing = \varnothing \quad ; \quad A \cup \varnothing = A.$

Con queste convenzioni si possono tradurre con calcoli le operazioni della logica verbale classica. Si consideri per esempio lo schema sillogistico classico, indicato con la parola convenzionale BARBARA, forma perfetta di sillogismo aristotelico della prima figura. Esprimendo nella forma abbreviata «Tutti i B sono C» la proposizione: «Tutti gli elementi (dell'insieme) B sono anche elementi dell'insieme C», un esempio di sillogismo della forma BARBARA potrebbe essere il seguente:

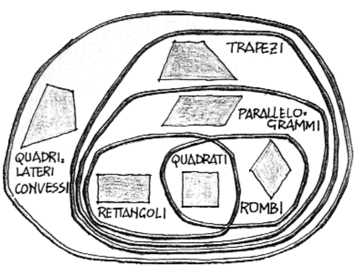
tutti i B sono C (premessa maggiore)
tutti gli A sono B (premessa minore)

allora

tutti gli A sono C (conclusione).



Per illustrare queste proposizioni con diagrammi di Eulero, si tracciano abitualmente tre ovali, A, B, C, ciascuno dei quali è interno al successivo o coincide con esso. Ma, ripetiamo, questa procedura conduce soltanto a illustrare la mutua situazione dei tre insiemi considerati.



Tuttavia le regole dell'algebra di Boole permettono di dedurre la conclusione del sillogismo con una procedura analoga a un calcolo algebrico, procedura che si fonda soltanto sulle regole che reggono i simboli introdotti, le formule e le loro trasformazioni.
Utilizzando qui le convenzioni simboliche dell'algebra di Boole, le due premesse del sillogismo possono essere espresse con le formule:

(8) $B \cap C = B$ (tutti i B sono C)

(9) $A \cap B = A$. (tutti gli A sono B).
Operando su entrambi i membri della (8) con l'intersezione con A si ottiene:

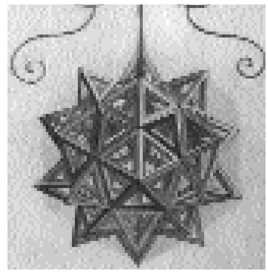
(10) $A \cap (B \cap C) = A \cap B$
e di qui, applicando la proprietà associativa per l'operazione di intersezione, e tenendo conto della (9) si ottiene:

(11) $A \cap C = A$

formula che traduce la conclusione (tutti gli A sono C) del sillogismo.

Il secolo XIX e la crisi dei fondamenti

Nel paragrafo precedente abbiamo fatto vedere come una deduzione, che nella logica classica era affidata alle leggi del sillogismo, possa essere presentata come un calcolo, cioè come una trasformazione di espressioni secondo leggi formali ben precise.
L'utilizzazione di un formalismo convenzionale è risultato di una evoluzione epistemologica che è avvenuta nel secolo XIX; per effetto di tale evoluzione, alla fine del secolo la matematica ha acquisito un assetto e una struttura del tutto diversi da quelli classici. Si potrebbe dire che uno degli episodi scatenanti di questa evoluzione è rappresentato dalla invenzione delle cosiddette geometrie non-euclidee e, soprattutto, dalla conseguita dimostrazione che tali geometrie sono coerenti.
Questo e altri episodi hanno dato origine a una serie di ricerche, le quali gravitano attorno a quella che viene chiamata «la crisi dei fondamenti (della matematica)». In particolare, insieme alle ricerche sui fondamenti della geometria si sono avute ricerche sui fondamenti dell'aritmetica, cioè sui concetti primitivi di ogni pensiero matematico.
In questo ambito ha fatto epoca un'opera del matematico italiano G. Peano (Giuseppe Peano, 1858-1932), intitolata *Arithmetices principia nova methodo exposita*, nella quale Peano impostava i fondamenti dell'aritmetica su cinque postulati, che ancora oggi vengono citati come «assiomi di Peano».
Per esporre le sue idee Peano creò un sistema di notazioni logiche, che è stato adottato dal filosofo B. Russell (Bertrand Russell, 1872-1970) e dal matematico A. Whitehead (Alfred North Whitehead, 1861-1947), nella loro opera intitolata *Principia Mathematica*.
Appare chiaro che questi ricercatori, come molti altri che non possiamo ricordare qui, hanno sentito il bisogno di utilizzare dei linguaggi artificiali e convenzionali per superare le difficoltà e le ambiguità dei



[6]Cfr.: C.F. Manara, *Il certo ed il probabile,* La Scuola, Brescia 1989.

linguaggi naturali, di cui abbiamo già detto.
Occorre tuttavia ricordare che furono inventati diversi altri sistemi di notazioni logiche, tutti diretti agli stessi scopi; ricordiamo qui il sistema di G. Frege (Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848-1925), il sistema di D. Hilbert (David Hilbert, 1862-1943), e quello di J. Lukasiewicz (Jan Lukasiewicz, 1878-1956). Daremo qui qualche cenno dei primi capitoli di questi sistemi di notazione.

Calcolo proposizionale del primo ordine

In quest'ambito, le lettere maiuscole (3) indicano delle proposizioni, cioè delle espressioni verbali dotate di senso compiuto e tali che a ognuna si possa attribuire un «valore di verità»; tale valore può essere espresso da una delle due qualifiche «vero» o «falso». Spesso per indicare tali valori si scelgono i simboli «V» e «F». Noi sceglieremo qui di indicare convenzionalmente tali valori con i simboli numerici 1 e 0 rispettivamente. Si suol dire che, con questo atteggiamento, le proposizioni sono assunte «non analizzate», intendendo così indicare che - come si è detto - si prendono in considerazione soltanto i valori di verità delle proposizioni, senza distinguere in esse soggetto, predicato e tutti gli altri elementi che formavano oggetto dell'analisi della logica classica, che utilizzava il linguaggio comune. Partendo da certe proposizioni che chiameremo «semplici» o atomiche, il calcolo proposizionale procede alla costruzione di altre proposizioni, che qui chiameremo «composte». La costruzione di tali proposizioni si ottiene mediante operatori che vengono chiamati «connettivi».
Si può dimostrare che ogni proposizione composta si potrebbe costruire ricorrendo a un unico connettivo: tuttavia le formule che così si ottengono non sarebbero per noi usuali e di facile lettura; pertanto presenteremo i connettivi che si impiegano più frequentemente, utilizzando le notazioni di Hilbert.

David Hilbert (1862 - 1943)

Il primo e più elementare connettivo è
la negazione:

indicata con A una proposizione elementare,
si indica con «¬A» (leggendo «non A»)
la proposizione che è falsa quando A è vera e vera quando A è falsa.

Altri connettivi sono

la congiunzione:

date due proposizioni A e B,
si indica con «A∧B» (leggendo «A e B»)
la proposizione che è vera nel solo caso in cui siano vere entrambe A e B, e falsa in ogni altro caso.

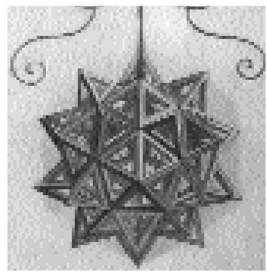
l'alternativa:

date due proposizioni A e B,
si indica con «A∨B» (leggendo «A oppure B»)
la proposizione che è vera se almeno una delle due è vera.

la implicazione materiale:

date due proposizioni A e B,
si indica col simbolo «A→B» (leggendo A implica B)
la proposizione che è falsa se A è vera e B è falsa,
e vera in ogni altro caso.

In base alle definizioni qui date, si ottiene che le proposizioni composte hanno certi valori di verità che dipendono da quelli delle proposizioni atomiche componenti.
Per la loro determinazione vengono utilizzati diversi metodi, a seconda delle preferenze dei vari autori.
Daremo qui un metodo per il calcolo del valore di verità delle proposizioni composte che utilizza i simboli 1 e 0 (di cui abbiamo detto) come numeri, calcolando con essi secondo le regole dell'aritmetica modulo 2.
Come è noto, in questa aritmetica si utilizzano soltanto i due simboli 0 e 1, con le seguenti regole per le operazioni:



$$0 + 1 = 1+0 = 1;\quad 0 + 0 = 1+1 = 0;\quad 1 \cdot 1 = 1\ ;\quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0. \tag{12}$$

E quindi in generale:

$$a + a = 0;\quad a^2 = a. \tag{13}$$

Consideriamo ora varie proposizioni:

A, B, C, ..., X, Y, Z,

e indichiamo il valore di verità di ciascuna con la lettera minuscola corrispondente alla lettera maiuscola che indica la proposizione:per esempio il simbolo x indicherà il valore di verità (0 oppure 1) della proposizione indicata con X.
Con queste convenzioni i valori di verità delle proposizioni, composte con i connettivi che abbiamo introdotto, sono dati

dalla seguente tabella, nella quale a sinistra figurano i simboli delle proposizioni composte e a destra i corrispondenti valori di verità, calcolati nell'aritmetica modulo 2, di cui abbiamo dato le regole:

Negazione	$\neg X$	$x+1$
Congiunzione	$X \wedge Y$	$x \cdot y$
Alternativa	$X \vee Y$	$x \cdot y + x + y$
Implicazione materiale	$X \Rightarrow Y$	$x \cdot y + x + 1$

Da queste espressioni si può partire per determinare il valore di verità di una formula comunque complessa, con regole analoghe a quelle dell'algebra elementare abituale.
Ricordiamo tuttavia che si possono utilizzare altre convenzioni e altre procedure, tra le varie che sono state escogitate.

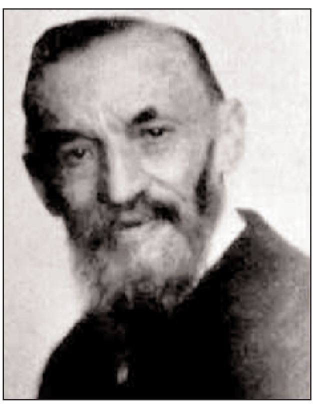
La logica dei predicati

Nel paragrafo precedente abbiamo preso in considerazione le proposizioni non analizzate.
Ciò ci ha permesso di istituire un calcolo, cioè un insieme di regole di deduzione, analoghe a quelle che regolano l'algebra elementare abituale.
È possibile proseguire su questa strada, formalizzando convenzionalmente anche il concetto di «predicato», che è fondamentale per la logica classica.
La procedura che si segue parte dalla considerazione di quelle che sono chiamate «forme proposizionali aperte». Queste potrebbero essere descritte come proposizioni «con lacune»; un esempio del caso più semplice potrebbe essere:

(14) x è la città capitale della Francia;

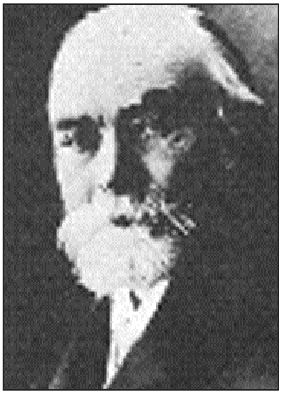
nell'espressione precedente la lettera «x» sta ad indicare una lacuna, che può essere colmata scrivendo al posto di x il nome di una città, alla quale viene attribuito il predicato (o qualità che dir si voglia) di essere capitale della Francia. Con una sostituzione siffatta la (14) diventa una proposizione con senso compiuto, la quale risulta essere vera se al posto di x si scrive «Parigi» e invece risulta falsa se al posto di x si scrive un altro nome qualunque. Si suol scrivere la (14) in forma simbolica con una formula come la seguente:

(15) $C(x)$ o anche $C(\cdot)$

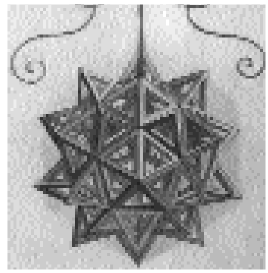


Giuseppe Peano (1858 - 1932)

convenendo che la lettera «C» indichi il predicato «città capitale di».
Si osserva ora che si può operare sulla proposizione nella forma (14), o (15) equivalente, non soltanto colmando la lacuna col nome di un oggetto, ma anche premettendo al simbolo del predicato un simbolo che viene chiamato «quantificatore», il quale svolge il compito delle parole «ogni» oppure «tutti» oppure «alcuni»: in un paragrafo precedente abbiamo già incontrato frasi che contengono alcune di queste parole.


Friedrich Frege (1848 - 1925)

Gli inventori dei formalismi logici (Peano, Hilbert, Frege) hanno adottato simboli diversi per indicare l'operazione logica di quantificazione.
Per esempio, nei formalismi ispirati da quello inventato da D. Hilbert, si introducono di solito due «operatori di quantificazione»: uno, avete la forma di una lettera A capovolta, è scelto a indicare il «quantificatore universale», cioè l'operazione logica che con il linguaggio comune si ottiene con le parole «tutti gli x (elementi di un dato insieme)»; un altro quantificatore, chiamato «quantificatore esistenziale» viene indicato con una lettera E maiuscola ribaltata rispetto ad un asse di simmetria verticale, e viene scelto per indicare l'operazione logica che nel linguaggio comune si ottiene con le parole «esiste qualche x» oppure, se si vuole, «esiste almeno un x» (elemento di un insieme dato) (che possiede la qualità indicata dal predicato).
L'introduzione dei quantificatori consente di trattare in forma di «calcolo», cioè applicando delle precise regole formali, anche la deduzione logica sui predicati, il che rappresenta una formalizzazione più raffinata e potente del solo calcolo degli enunciati.
In questa sede rinunciamo a approfondire il discorso in questa direzione, pur essendo consapevoli di aver dato, fin qui, solo qualche cenno rudimentale e sommario dei metodi della logica simbolica.
Ma l'addentrarci ulteriormente in un campo dottrinale che diventa di giorno in giorno più vasto richiederebbe l'impiego di linguaggi tecnici e di formalismi, che possono presentare qualche difficoltà di lettura.
Ci limitiamo a ricordare che gli strumenti di logica simbolica, di cui abbiamo parlato, sono stati utilizzati per affrontare ardui problemi riguardanti i fondamenti della matematica; e d'altra parte l'impiego di questi strumenti è stato occasione per la formulazione di nuovi problemi e stimolo per nuove ricerche in



questo campo.

Considerazioni didattiche

È noto che i programmi d'insegnamento delle nostre scuole richiedono esplicitamente che agli scolari e agli studenti siano date delle nozioni di logica; ciò pone gli insegnanti di fronte a vari problemi didattici, nati dalla esistenza e dall'impiego degli strumenti della logica simbolica. Non intendiamo trattare a fondo in questa sede tali problemi, la cui soluzione richiederebbe ben altro spazio; ma non possiamo esimerci dal presentare alcune osservazioni che si collegano a quanto è stato esposto finora.

Una prima osservazione riguarda un aspetto della matematica: essa si presenta anche come un linguaggio, il quale, in partenza, utilizza necessariamente il linguaggio comune costruendo poi, a partire da questo, un proprio insieme di simboli convenzionali; questi sono regolati da una sintassi molto rigida, la quale permette di svolgere deduzioni ineccepibilmente rigorose, fondate sull'applicazione e sul rispetto delle regole convenzionali stabilite per i simboli stessi.

Una seconda osservazione riguarda il fatto che l'impiego dei simboli non dispensa dalla fatica del pensiero, ed in particolare dalla ricerca della chiarezza dei concetti e del rigore nella deduzione. Infatti, in forma paradossale e provocatoria, è lecito pensare che ciò che alcuni chiamano «insegnare a ragionare» si può ottenere con l'insegnare a riflettere sulle proprie operazioni di pensiero, e ad applicare in modo ineccepibile le procedure di analisi e di sintesi; le quali sono state codificate da decine di secoli, anche se gli strumenti linguistici e simbolici, con i quali tali procedure si attuano, possono sempre essere fatti progredire.

Scaturisce da qui una terza osservazione: le stesse grandi leggi logiche reggono la matematica e l'impiego del linguaggio comune, quando venga adoperato per esprimere concetti chiari e ragionamenti validi.

Pertanto, in questo ordine di idee, è abbastanza ragionevole pensare che il successo scolastico di un alunno adolescente in uno dei due ambiti dottrinali, letterario e scientifico, è quasi regolarmente accompagnato dal successo anche nell'altro; se pure talvolta con qualche differenza, dovuta alle diverse tendenze e simpatie dei vari soggetti; e lo stesso si può dire dello scarso successo o dell'insuccesso.

Quindi, se la scuola vuol raggiungere il suo scopo di maturare le menti e gli spiriti, la matematica va considerata non come una materia strettamente tecnica, ma come una dottrina essenzialmente formativa della razionalità e dell'autonomia di pensiero.

**Professore Emerito di Geometria*
Milano